

# Unidad II

## Transformada de Laplace

### 2.1. Definición y propiedades de la transformada de Laplace.

Sea  $E$  el espacio vectorial de las funciones continuas a trozos y de orden exponencial (esto es, dada una función  $f(t)$  continua a trozos existen las constantes  $K$  y  $\omega$  tales que  $\forall t$  la función  $f$  está acotada en la forma  $|f(t)| \leq K e^{\omega t}$ ).

Se define la Transformada de Laplace  $L[\cdot]$  de la función  $f(t) \in E$  como la transformada integral

$$L[f(t)] \equiv F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

0

e

$-st f(t) dt$

### 2. Propiedad de linealidad de la transformada de Laplace

La transformación de Laplace es lineal, esto es, dadas dos funciones  $f, g \in E$  se verifica

$$L[C_1 f(t) + C_2 g(t)] = C_1 L[f(t)] + C_2 L[g(t)], \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

### 2.2. Condiciones suficientes de existencia para la transformada de Laplace.

Como la transformada de Laplace se define en términos de una integral impropia que puede ser divergente, existen funciones para las cuales no existe dicha transformada, incluso hay funciones discontinuas, como la del ejemplo anterior, que pueden tener transformada; entonces, ¿bajo qué condiciones una función tiene transformada de Laplace?. Antes de dar una respuesta parcial a esta pregunta debemos dar algunas definiciones.

$$\left| \int_T^b e^{-st} y(t) dt \right|$$

### 2.3. Transformada directa.

Imaginemos un integral que sea de la forma,

$$I = \int_a^b e^{-\lambda g(y)} h(y) dy$$

Aquí es un valor muy grande y  $g(y)$  y  $h(y)$  son funciones continuamente diferenciables, donde la función  $g(y)$  tiene sus mínimos locales en el punto  $y^*$  dentro de un intervalo par abierto  $(a, b)$  para los cuales la función es definida.

Imagina que la densidad de  $Y$  es muy alta, entonces la integral puede ser sólo un integral o puede ser una anticipación subsecuente de la función  $h(y)$ . También puede ser una función que genera el momento parala distribución de la función  $g(y)$ . En caso de que el valor de sea muy grande, entonces su participación hacia esta integral fundamental instiga desde las inmediaciones alrededor del punto  $y^*$ .

Las declaraciones crípticas con respecto a la integral, como se ha establecido arriba, puede ser formalmente denotada en la manera de una expresión de Taylor como la función  $g(y)$  alrededor del punto  $y^*$  como,

$$g(y) = g(y^*) + g'(y^*) (y - y^*) + g''(y^*) (y - y^*)^2 / 2 + \dots$$

Al hacer uso de las condiciones iniciales establecidas anteriormente que el punto  $y^*$  es el punto de mínimos locales, podemos afirmar que  $g'(y^*) = 0$  y  $g''(y^*)$  es siempre mayor que cero. Por lo tanto, reescribiendo la ecuación anterior obtenemos,

$$g(y) - g(y^*) = g''(y^*) (y - y^*)^2 / 2 + \dots$$

Mediante la aproximación de la función  $h(y)$  linealmente en las proximidades del punto  $y^*$  obtenemos,

$$I \approx e^{-\lambda g(y^*)} h(y^*) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda g''(y^*) (y - y^*)^2 / 2} dy + e^{-\lambda g(y^*)} h'(y^*) \int_{-\infty}^{\infty} (y - y^*) e^{-\lambda g''(y^*) (y - y^*)^2 / 2} dy + e^{-\lambda g(y^*)} h(y^*) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda g''(y^*)}} + 0$$

## 2.4. Transformada inversa.

En matemática, la **transformada inversa de Laplace** de una función  $F(s)$  es la función  $f(t)$  que cumple con la propiedad

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),$$

donde  $\mathcal{L}$  es la transformada de Laplace.

La transformada de Laplace junto con la transformada inversa de Laplace tienen un número de propiedades que las hacen útiles para el análisis de sistemas dinámicos lineales.

## 2.5. Transformada de derivadas (teorema).

Sea  $a$  trozos y de orden exponencial, entonces la transformada de Laplace de  $f(t)$  existe un número para una función continua existe. Es decir, tal que existe.

## Demostración

Por ser  $f$  de orden exponencial existen números no negativos  $T$ ,  $k$  y  $M$  tales

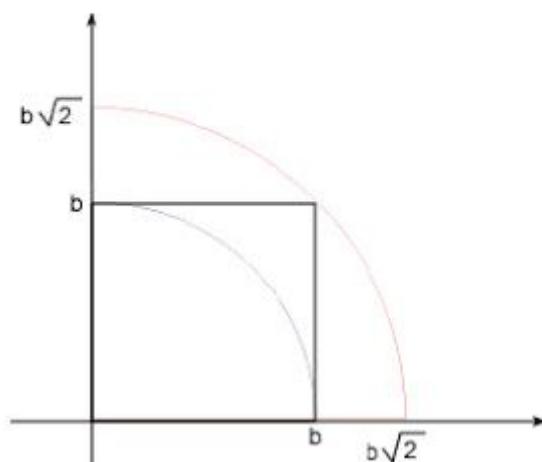
que  $|y(t)| \leq M e^{kt}$ , para  $t > T$ . Así que

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt$$

teorema anterior enuncia una condición suficiente y no necesaria para la existencia de la transformada de Laplace, es decir, puede darse el caso de una función aún así tenga transformada, como lo muestra el siguiente ejemplo. que no cumpla las hipótesis del teorema, pero aún así tenga transformada, como lo muestra el siguiente ejemplo.

$$= \int_0^b \int_0^b e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$= \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$



## 2.6. Transformada de integrales (teorema).

La función real debe estar definida para la variable de tiempo, también la función debe ser definida de forma continua en el intervalo  $[0, \infty)$ . Asimismo, el integral de esta función debe ser una función continua a trozos para el mismo intervalo, esto es,  $[0, \infty)$ .

Y, por último, ambas, la función real como el diferencial de la función real deben ser de orden exponencial cuando el valor de  $t$  tiende al infinito. Esto significa que deben existir dos números reales positivos  $M$  y  $\alpha$ , un número  $T$  tal que,

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

Aquí el valor de  $t$  debe ser siempre mayor o igual que  $T$ .

Asumiendo que las condiciones anteriores son válidas para la función de entrada y  $L\{f(t)\} = F(s)$ , entonces la transformada de Laplace de la integral de la función real puede darse como,

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

## 2.7. Teorema de la convolución.

En matemática, el **teorema de convolución** establece que bajo determinadas circunstancias, la Transformada de Fourier de una convolución es el producto punto a punto de las transformadas. En otras palabras, la convolución en un dominio (por ejemplo el dominio temporal) es equivalente al producto punto a punto en el otro dominio (es decir dominio espectral).

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones cuya convolución se expresa con  $f * g$ . (notar que el asterisco denota convolución en este contexto, y no multiplicación; a veces es utilizado también el símbolo  $\otimes$ ). Sea  $\mathcal{F}$  el operador de la transformada de Fourier, con lo que  $\mathcal{F}[f]$  y  $\mathcal{F}[g]$  son las transformadas de Fourier de  $f$  y  $g$ , respectivamente.

Entonces

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}(\mathcal{F}[f]) \cdot (\mathcal{F}[g])$$

donde  $\cdot$  indica producto punto. También puede afirmarse que:

$$\mathcal{F}[f \cdot g] = \frac{\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]}{\sqrt{2\pi}}$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$ , podemos escribir:

$$f * g = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]]$$

## 2.8. Transformada de Laplace de una función periódica.

Si  $f(t)$  es una [función periódica](#) con período  $T$ :

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt$$